SESSION 1991

SECONDE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Notations

Dans tout le problème, on se donne un entier $q \geqslant 2$ fixé une fois pour toutes.

On note $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) le corps des nombres réels (resp. des nombres complexes), et $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ formé des polynômes à une variable à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour tout n entier $\geqslant 1$, on note P_n l'élément de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P_n(X) = \prod_{k=1}^{n} \left(X - 2\cos\frac{k\pi}{n+1} \right).$$

On pose $P_0(X) = 1$.

Si N est un entier $\geqslant 1$, l'ensemble des matrices carrées $N \times N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est noté $M_N(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace d'un élément A de $M_N(\mathbb{C})$, et I_N la matrice unité de $M_N(\mathbb{C})$, c'est-à-dire la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

À toute matrice $A \in M_N(\mathbb{C})$, on associe la forme linéaire $\mu_A : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout élément P de $\mathbb{C}[X]$, on ait :

$$\mu_A(P) = \frac{1}{N} \sum_{\lambda} P(q^{-1/2}\lambda),$$

λ parcourant les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire, si l'on préfère :

$$\mu_A(P) = \frac{1}{N} \sum_{\lambda} m(\lambda) P(q^{-1/2}\lambda),$$

λ parcourant alors les valeurs propres distinctes de A, et $m(\lambda)$ désignant l'ordre de multiplicité de λ.

En particulier, on a $\mu_{I_N}(P) = P(q^{-1/2})$.

PARTIE I

I.1. Vérifier les formules suivantes, pour $n \geqslant 0$:

I.1.*a*. Pour tout $x \in \mathbb{C} - \{0\}$:

$$P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^{n-2k}.$$

I.1.*b*. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin x) P_n(2\cos x) = \sin((n+1)x)$.

I.1.*c*. $P_{n+2}(X) = X P_{n+1}(X) - P_n(X)$.

I.2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant 2$, on a :

$$|P_n(x)| \leqslant n + 1.$$

I.3. Calculer :

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, P_n(x)\, dx,$$

pour $n \geqslant 0$.

A SUIVRE

I.4.

I.4.*a.* Montrer que, pour $0 \leqslant n \leqslant m$, on a :

$$P_n P_m = \sum_{k=0}^{n} P_{m+n-2k}.$$

I.4.*b.* Montrer que, pour $n \geqslant 1$, et pour $x, y \in \mathbb{C}$, on a :

$$P_n(x) - P_n(y) = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) P_{n-k-1}(y).$$

I.4.*c.* Soit $n \geqslant 1$, et Y_n le polynôme défini par : $\displaystyle Y_n(X) = \frac{P_n^2(X)}{X - 2\cos\frac{\pi}{n+1}}$.

Montrer qu'il existe $2n$ nombres réels $y_k \geqslant 0$, $k = 0, \ldots, 2n-1$, tels que :

$$Y_n = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k P_k.$$

PARTIE II

Si N est un nombre entier $\geqslant q+1$, on dit qu'une matrice T de $M_N(\mathbb{C})$ possède la propriété $\mathscr{P}_N$ si :

i. T est symétrique ;

ii. Ses coefficients $t_{i,j}$ sont égaux à 0 ou à 1 ;

iii. Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant N$, on a :

$$\sum_{j=1}^{N} t_{i,j} = q + 1.$$

Dans toute la partie II, N est un entier fixé $\geqslant q+1$, et $T = (t_{i,j})$ une matrice vérifiant la propriété $\mathscr{P}_N$.

II.1. Montrer que les valeurs propres de T sont des nombres réels de valeur absolue $\leqslant q+1$.

II.2. Soit v un vecteur propre de T de valeur propre distincte de $q+1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{N} x_i = 0$, où les x_i sont les composantes de v.

II.3. Soit $S_N = \{1, \ldots, N\}$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et N. Un T-*chemin de longueur k* entre 2 éléments x et y de S_N est par définition la donnée de $k+1$ éléments $u_0, \ldots, u_k$ de S_N tels que $u_0 = x$, $u_k = y$, et $t_{u_i, u_{i+1}} = 1$, pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Un T-*chemin de longueur k sans aller-retour* est un T-chemin $(u_0, \ldots, u_k)$ de longueur k tel que, pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant k-2$, on ait $u_i \neq u_{i+2}$.

Pour tout $k \geqslant 1$, soit U_k^T la matrice de $M_N(\mathbb{C})$ dont le (i,j)-ème coefficient $u_{i,j}$ est égal au nombre de T-chemins de longueur k sans aller-retour entre i et j. On pose d'autre part $U_0^T = I_N$, et, pour tout $n \geqslant 0$:

$$V_n^T = \sum_{k=0}^{[n/2]} U_{n-2k}^T,$$

où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$.

En particulier, on a $V_0^T = I_N$, et $V_1^T = T$.

Tournez la page S.V.P.

II.3.*a.* Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$V_n^T = q^{n/2} P_n(q^{-1/2}T).$$

II.3.*b.* Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\mathrm{tr}(V_n^T) = N q^{n/2} \mu_T(P_n).$$

II.3.*c.* Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mu_T(P_n) \geqslant 0$.

PARTIE III

Dans cette partie, on se donne une suite de matrices (T_N), $N \geqslant q + 1$, possédant la propriété $\mathscr{P}_N$.

III.1. Soit ε un nombre réel > 0.

III.1.*a.* Montrer qu'il existe un polynôme Y, combinaison linéaire à coefficients $\geqslant 0$ des polynômes P_n, tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant 2 - \varepsilon$, on ait :

$$Y(x) < -1.$$

(On pourra utiliser une combinaison linéaire convenable des polynômes Y_n de la question I.4.).

III.1.*b.* Pour tout $N \geqslant q + 1$, soit a_N le nombre de valeurs propres de T_N, comptées avec leur multiplicité, qui sont $\geqslant 2\sqrt{q} - \varepsilon$. Montrer qu'il existe une constante $C_\varepsilon > 0$, indépendante de N, telle que :

$$a_N > C_\varepsilon N.$$

(On pourra considérer $\mu_{T_N}(Y)$.)

III.2. On suppose désormais qu'il existe une suite (c_n) de nombres réels $\geqslant 0$ tels que, pour tout $N \geqslant q + 1$, et pour tout $n \geqslant 1$, on ait :

$$\mathrm{tr}(U_n^{T_N}) \leqslant c_n,$$

où $U_n^{T_N}$ est la matrice associée à T_N dans la question II.3.

III.2.*a.* Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\lim_{N \to +\infty} \mu_{T_N}(P_{2n+1}) = 0$$

et

$$\lim_{N \to +\infty} \mu_{T_N}(P_{2n}) = q^{-n}.$$

A SUIVRE

III.2.*b*. Montrer que la série de fonctions définies sur l'intervalle $[-2, 2]$ et à valeurs réelles, de terme général $q^{-n} P_{2n}$ $(n \geqslant 0)$, converge normalement sur l'intervalle $[-2, 2]$.

Soit $\phi = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n} P_{2n}$ la somme de cette série, et soit μ la forme linéaire sur $\mathbb{C}[X]$ telle que, pour tout élément P de $\mathbb{C}[X]$, on ait :

$$\mu(P) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, \phi(x) P(x) dx.$$

III.2.*c*. Montrer que, pour tout élément P de $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$\lim_{N \to +\infty} \mu_{T_N}(P) = \mu(P).$$

III.3.*a*. Soient $a < b$ deux nombres réels, et J l'intervalle $[a, b]$. Soit g une fonction continue de J dans $\mathbb{R}$, et c un élément de J. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n) \in \mathbb{R}[X]$, $n \geqslant 0$, tels que :

i. Pour tout $x \in J$, et tout $n \geqslant 0$, $Q_n(x) \geqslant 0$.

ii. $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b g(x) Q_n(x) dx = 0$.

iii. Pour tout $n \geqslant 0$, $Q_n(c) = 1$.

(On pourra utiliser le polynôme $1 - \left(\frac{X - c}{b - a} \right)^2$.)

III.3.*b*. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leqslant q + 1$. Soit (b_N), $N \geqslant q + 1$, la suite d'entiers définie de la façon suivante :

Si α n'est pas valeur propre de T_N, on pose $b_N = 0$. Sinon, b_N est l'ordre de multiplicité de la valeur propre α de T_N.

Montrer que :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{b_N}{N} = 0.$$

(On pourra utiliser la question précédente, avec a, b et g convenablement choisis, et considérer $\mu_{T_N}(Q_n)$.)

FIN